

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
функционального анализа  
и операторных уравнений



Каменский М.И.  
подпись, расшифровка подписи  
25.05.2023 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.О.14 Элементы теории фредгольмовых отображений**

- 1. Код и наименование направления:** 02.04.01 математика и компьютерные науки.
- 2. Профиль:** математическое и компьютерное моделирование; математические методы и компьютерные технологии в естествознании, экономике и управлении
- 3. Квалификация выпускника:** магистр
- 4. Форма обучения:** очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** кафедра функционального анализа и операторных уравнений
- 6. Составители программы:** Сапронова Татьяна Юрьевна, к.ф.-м.н., математический факультет, кафедра функционального анализа и операторных уравнений
- 7. Рекомендована:** НМС математического факультета, протокол № 0500–06 от 25.05.2023
- 8. Учебный год:** 2024–2025 **Семестр(ы):** третий

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины

*Цели учебной дисциплины:* изучение основ теории фредгольмовых отображений и фредгольмовых функционалов, заданных на банаховых пространствах.

*Задачи учебной дисциплины:* овладение навыками исследования функционалов, заданных на банаховых пространствах.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:** дисциплина «Элементы теории фредгольмовых отображений» является основной дисциплиной блока Б1.

Основные дисциплины и их разделы, необходимые для усвоения курса «Элементы теории фредгольмовых отображений»:

- математический анализ (производная и дифференциал функции, неопределенный и определенный интегралы, частные производные);
- функциональный анализ (метрические и линейные пространства, непрерывные отображения, норма, линейный ограниченный оператор, изоморфизм, вполне непрерывные операторы).

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:**

Код	Название компетенции	Код	Индикатор	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.1	Обладает фундаментальными знаниями и практическим опытом в формулировке и решении актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики	Знать: основные методы формулирования и решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики  Уметь: использовать фундаментальные знания в профессиональной деятельности  Владеть: навыками решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики
		ОПК-1.2	Умеет использовать фундаментальные знания в профессиональной деятельности	
		ОПК-1.3	Имеет навыки решения актуальных и значимых проблем прикладной и компьютерной математики	

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах** (в соответствии с учебным планом) — 3/108.

**Форма промежуточной аттестации — зачет.**

## 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость		
	Всего	По семестрам	
		сем. 3	сем. 4
Аудиторные занятия	20	20	
в том числе:	лекции	10	10
	практические	10	10
	лабораторные	0	0
Самостоятельная работа	88	88	

в том числе: курсовая работа (проект)	0	0	
Форма промежуточной аттестации	Зачет 0	Зачет 0	
Итого:	108	108	

### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Вполне непрерывные операторы.	Относительно компактные множества в нормированных пространствах (определение). Относительно компактные множества в конечномерных пространствах. Относительно компактные множества в пространстве $C[a, b]$ . Теорема Арцела (без доказательства). Линейные ограниченные операторы (определение и примеры). Норма оператора. Вполне непрерывные операторы (определение). Пример: оператор Фредгольма.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980</a>
1.2	Линейный фредгольмов оператор и его индекс	Фактор–пространство линейного пространства (определение и пример). Топологический изоморфизм линейных пространств. Прямые суммы. Ядро, образ и коядро линейного оператора. Линейный фредгольмов оператор и его индекс (определение). Теорема об образе фредгольмова оператора (без доказательства). Основные свойства фредгольмовых операторов (без доказательства). Примеры линейных фредгольмовых операторов.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980</a>
1.3	Нелинейные фредгольмовы отображения	Производная Фреше отображения, действующего в нормированных пространствах (определение и примеры). Теорема о производной композиции отображений (без доказательства). Нелинейные фредгольмовы отображения (определение). Индекс фредгольмова отображения (определение). Функционалы на банаховых пространствах. Определение градиента. Критические точки функционалов. Лемма о связи градиента с критическими точками. Определение фредгольмова функционала и его индекса.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980</a>
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Вполне непрерывные операторы.	Относительно компактные множества в нормированных пространствах (задачи). Относительно компактные множества в конечномерных пространствах. Относительно компактные множества в пространстве $C[a, b]$ . Теорема Арцела (задачи). Линейные ограниченные операторы. Норма оператора. Вполне непрерывные операторы (задачи).	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980</a>
2.2	Линейный фредгольмов оператор и его индекс	Фактор–пространство линейного пространства (определение и пример). Топологический изоморфизм линейных пространств. Прямые суммы. Ядро, образ и коядро линейного оператора. Линейный фредгольмов оператор и его индекс. Примеры линейных фредгольмовых операторов. Задачи.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980</a>
2.3	Нелинейные фредгольмовы ото-	Производная Фреше отображения, действующего в нормированных пространствах (задачи). Теорема о производной композиции отображений (задачи). Нелинейные фредгольмо-	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10980</a>

	бражения	вы отображения (задачи). Индекс фредгольмова отображения (задачи). Функционалы на банаховых пространствах. Определение градиента. Критические точки функционалов. Лемма о связи градиента с критическими точками. Определение фредгольмова функционала и его индекса. Вычисление градиентов некоторых функционалов (4 примера). Вспомогательные задачи (3 задачи). Уравнение маятника. Доказательство фредгольмовости отображения $f(x) = \ddot{x} + \lambda \sin x$ (при соответствующем выборе пространств).	<a href="http://hp?id=10980">hp?id=10980</a>
--	----------	--	--

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)					Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Контроль	
1	Вполне непрерывные операторы.	3	3	0	24	0	30
2	Линейный фредгольмов оператор и его индекс	2	2	0	24	0	28
3	Нелинейные фредгольмовы отображения	5	5	0	40	0	50
Итого:		10	10	0	88	0	108

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий и активную работу во время занятий, но и самостоятельную учебную деятельность, на которую отводится 88 часов.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по данной дисциплине предполагает выполнение следующих заданий:

- 1) самостоятельное изучение учебных материалов по разделам 1–3 с использованием основной и дополнительной литературы, информационно-справочных и поисковых систем;
- 2) подготовку к текущим аттестациям: выполнение домашних заданий, самостоятельное освоение понятийного аппарата по каждой теме.

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы и практических заданий) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (3 семестр – зачет).

В ходе изучения курса предусмотрено проведение коллоквиума (в форме индивидуального собеседования) и контрольной работы.

Учебные пособия по данному курсу размещены на сайтах <https://vk.com/nelinan> и <https://vk.com/fredholm>. На сайте <https://vk.com/fredholm> преподаватель публикует вспомогательные материалы и указания по изучаемым в данный момент вопросам, презентации лекций, решения задач, программы коллоквиумов и т.д.

При изучении материала курса по учебнику (конспекту) нужно, прежде всего, уяснить существо каждого излагаемого там вопроса. Главное – это понять изложенное в учебнике (конспекте), а не “заучить”.

Изучать материал рекомендуется по темам. Сначала следует прочитать весь материал темы (параграфа), особенно не задерживаясь на том, что показалось не совсем понятным; часто это становится по-

нятым из последующего. Затем надо вернуться к местам, вызвавшим затруднения, и внимательно разобраться в том, что было неясно. Особое внимание при повторном чтении обратите на формулировки соответствующих определений, теорем и т. п.; в точных формулировках, как правило, существенно каждое слово, поэтому важно понять их смысл и уметь изложить их своими словами.

Доказательства надо уметь воспроизводить самостоятельно, поняв идею доказательства; пытаться просто их "заучивать" не следует, никакой пользы это не принесет.

Особое внимание следует уделить приобретению навыков решения задач; теоретические знания надо научиться применять на практике. Для этого, изучив материал данной темы, надо разобраться в решениях соответствующих задач, которые приводятся в учебнике или обсуждаются на занятиях. Разбирая и решая задачи, обращайтесь внимание на то, какие положения теории применяются.

## 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	<i>Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – СПб.: Лань, 2009. – 272 с. (см. <a href="https://vk.com/nelinan">https://vk.com/nelinan</a> , <a href="https://vk.com/fredholm?w=wall-161468263_5">https://vk.com/fredholm?w=wall-161468263_5</a> )</i>
2	<i>Звягин В.Г. Линейные фредгольмовы операторы и их свойства. Учебное пособие / В.Г. Звягин [и др.] – ВГУ, 2007. – 81 с. (см. <a href="https://vk.com/fredholm?w=wall-199313526_8%2Fall">https://vk.com/fredholm?w=wall-199313526_8%2Fall</a> )</i>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	<i>Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 572 с. (см. <a href="https://vk.com/fredholm?w=wall-161468263_5">https://vk.com/fredholm?w=wall-161468263_5</a> )</i>
4	<i>Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы / А. Картан. – М.: Мир, 1971. – 392 с. (см. <a href="https://vk.com/nelinan">https://vk.com/nelinan</a> )</i>
5	<i>Борисович Ю.Г. Введение в топологию / Ю.Г. Борисович [и др.] – М.: Наука, 1995. – 416 с. (см. <a href="https://vk.com/nelinan">https://vk.com/nelinan</a> )</i>

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Ресурс
6	<a href="https://vk.com/fredholm">https://vk.com/fredholm</a> – страница «В Контакте», посвященная данному курсу
7	<a href="https://lib.vsu.ru/">https://lib.vsu.ru/</a> – электронный каталог ЗНБ ВГУ

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	<i>Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы / А. Картан. – М.: Мир, 1971. – 392 с. (см. <a href="https://vk.com/nelinan">https://vk.com/nelinan</a> )</i>
2	<i>Борисович Ю.Г. Введение в топологию / Ю.Г. Борисович [и др.] – М.: Наука, 1995. – 416 с. (см. <a href="https://vk.com/nelinan">https://vk.com/nelinan</a> )</i>

## 17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ».

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows, Microsoft Office, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet Explorer, ноутбук.

---

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:** учебная аудитория: специализированная мебель

### **19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция	Индикаторы достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Вполне непрерывные операторы.	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	домашние задания, контрольная работа, собеседование по билетам к зачету
2.	Линейный фредгольмов оператор и его индекс	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	домашние задания, контрольная работа, собеседование по билетам к зачету
3.	Нелинейные фредгольмовы отображения	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	домашние задания, контрольная работа, собеседование по билетам к зачету
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет				Перечень вопросов к зачету

### **20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания**

#### **20.1 Текущий контроль успеваемости**

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: домашние задания, контрольная работа.

##### **20.1.1 Перечень заданий для контрольной работы**

## БИЛЕТ 1

1. Функционал  $V(x) = \int_0^1 \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + x^2 + 2x \right) dt$  задан на БП

$E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$ ;  $F = C[0,1]$ ,  $H = L_2[0,1]$ . Найдите отображение  $f(x) = \text{grad}V(x)$ , производную Фреше отображения  $f: E \rightarrow F$  и докажите, что функционал  $V(x)$  является фредгольмовым индекса ноль.

2. Оператор  $A$  действует из БП  $E = C^1[0,1]$  в БП  $F = C[0,1]$ :

$$(Ax)(t) = (t+1) \cdot x(t), \quad x \in E, \quad t \in [0,1];$$

$E = C^1[0,1]$  – пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[0,1]$  функций,  $\|x\|_E = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\dot{x}(t)|$ .

Докажите, опираясь непосредственно на теорему Арцела, что оператор  $A$  является вполне непрерывным.

## БИЛЕТ 2

1. Функционал  $V(x) = \int_0^1 \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + \sin^2 x \right) dt$  задан на БП

$E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$ ;  $F = C[0,1]$ ,  $H = L_2[0,1]$ . Найдите отображение  $f(x) = \text{grad}V(x)$ , производную Фреше отображения  $f: E \rightarrow F$  и докажите, что функционал  $V(x)$  является фредгольмовым индекса ноль.

2. Оператор  $A$  действует из БП  $E = C^1[0,1]$  в БП  $F = C[0,1]$ :

$$(Ax)(t) = e^t \cdot x(t), \quad x \in E, \quad t \in [0,1];$$

$E = C^1[0,1]$  – пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[0,1]$  функций,  $\|x\|_E = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\dot{x}(t)|$ .

Докажите, опираясь непосредственно на теорему Арцела, что оператор  $A$  является вполне непрерывным.

## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

контрольная работа, собеседование по билетам.

### 20.2.1 Перечень вопросов к зачету

1. Относительно компактные множества в нормированных пространствах (определение).
2. Относительно компактные множества в конечномерных пространствах.

3. Относительно компактные множества в пространстве  $C[a,b]$ . Теорема Арцела (без доказательства).
4. Линейные ограниченные операторы (определение и примеры). Норма оператора.
5. Вполне непрерывные операторы (определение). Пример : оператор Фредгольма.
6. Фактор–пространство линейного пространства (определение и пример).
7. Топологический изоморфизм линейных пространств. Прямые суммы.
8. Ядро, образ и коядро линейного оператора.
9. Линейный фредгольмов оператор и его индекс (определение). Теорема об образе фредгольмова оператора (без доказательства).
10. Основные свойства фредгольмовых операторов (без доказательства).
11. Примеры линейных фредгольмовых операторов.
12. Производная Фреше отображения, действующего в нормированных пространствах (определение и примеры). Теорема о производной композиции отображений (без доказательства).
13. Нелинейные фредгольмовы отображения (определение). Индекс фредгольмова отображения (определение).
14. Функционалы на банаховых пространствах. Определение градиента. Критические точки функционалов. Лемма о связи градиента с критическими точками.
15. Определение фредгольмова функционала и его индекса.
16. Вычисление градиентов некоторых функционалов (4 примера).
17. Вспомогательные задачи (3 задачи).
18. Уравнение маятника. Доказательство фредгольмовости отображения  $f(x) = \ddot{x} + \lambda \sin x$  (при соответствующем выборе пространств).

### 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

#### Задания закрытого типа

1. Оператор  $A = \frac{d^2}{dt^2}$  действует из пространства  $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$  в пространство  $F = C[0,1]$ ,  $Ax = \ddot{x}$ .

Размерность ядра этого оператора равна: а) 0, б) 1, в) 2.

Ответ : а) 0

Решение. Пусть  $x \in \text{Ker } A$ . Тогда  $Ax = \ddot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = at + b$ . В силу условия  $x(0) = x(1) = 0$  получаем, что  $x(t) \equiv 0$ . Следовательно,  $\text{Ker } A = \{\theta\}$ .

2. Оператор  $A = \frac{d^2}{dt^2}$  действует из пространства  $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$  в пространство  $F = C[0,1]$ ,  $Ax = \ddot{x}$ .

Размерность коядра этого оператора равна: а) 0, б) 1, в) 2.

Ответ : а) 0



Решение. Рассмотрим произвольный  $y \in F$ . Элемент  $x \in E$ , заданный выражением

$$x(t) = \int_0^t \left( \int_0^s y(u) du \right) ds - t \int_0^1 \left( \int_0^s y(u) du \right) ds, \quad \text{для которого выполняется условие}$$

$x(0) = x(1) = 0$ , является решением уравнения  $Ax = \ddot{x} = y$ , то есть является прообразом элемента  $y$ . Итак,  $\text{Im } A = F$ . Следовательно, коядро оператора  $A$  нульмерно.

3. Оператор  $B = \frac{d^2}{dt^2}$  действует из пространства  $E = C^2[0,1]$  в пространство

$F = C[0,1]$ ,  $Bx = \ddot{x}$ . Размерность ядра этого оператора равна: а) 0, б) 1, в) 2.

Ответ : в) 2

Решение. Пусть  $x \in \text{Ker } B$ . Тогда  $Bx = \ddot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = at + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^1$ .

Следовательно,  $\text{Ker } B$  двумерно.

4. Оператор  $B = \frac{d^2}{dt^2}$  действует из пространства  $E = C^2[0,1]$  в пространство

$F = C[0,1]$ ,  $Bx = \ddot{x}$ . Размерность коядра этого оператора равна: а) 0, б) 1, в) 2.

Ответ : а) 0

Решение. Рассмотрим произвольный  $y \in F$ . Элемент  $x \in C^2[0,1]$ , заданный выражением

$$x(t) = \int_0^t \left( \int_0^s y(u) du \right) ds, \quad \text{является решением уравнения } Bx = \ddot{x} = y, \text{ то есть является про-}$$

образом элемента  $y$ . Итак,  $\text{Im } B = F$ . Следовательно, коядро оператора  $B$  нульмерно.

5. Отображение  $f(x) = \dot{x}$  действует из пространства  $E = C^1[0,1]$  в пространство

$F = C[0,1]$ . Производная Фреше этого отображения равна: а) нулевому оператору,

б) единичному оператору, в) оператору дифференцирования  $B = \frac{d}{dt}$ .

Ответ : в) оператору дифференцирования  $B = \frac{d}{dt}$ .

Решение.  $f(x+h) - f(x) = \dot{x} + \dot{h} - \dot{x} = \frac{d}{dt}h = Bh$ .

6. Верно ли, что любой линейный оператор  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  является фредгольмовым?

Ответ: верно.

Решение. Очевидно, что  $\dim \text{Ker } A \leq n$  и  $\dim \text{Coker } A \leq m$ .

### Задания открытого типа

7. Найдите фредгольмов индекс оператора  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , заданного матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ :

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Ответ: 0

Решение. Матрица невырождена, так как ее определитель отличен от нуля. Следовательно, оператор является изоморфизмом, то есть его фредгольмов индекс равен нулю.

8. Найдите фредгольмов индекс оператора  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$Ax = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Ответ: 0

Решение. Матрица оператора имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Она невырождена, так как ее определитель отличен от нуля. Следовательно, оператор является изоморфизмом, то есть его фредгольмов индекс равен нулю.

Решение. Матрица оператора имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Она невырождена, так как ее определитель отличен от нуля. Следовательно, оператор является изоморфизмом, то есть его фредгольмов индекс равен нулю.

9. Оператор  $A = \frac{d^2}{dt^2}$  действует из пространства  $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$  в пространство  $F = C[0,1]$ . Найдите фредгольмов индекс этого оператора.

Ответ: 0

Решение.  $\text{Ind } A = \dim \text{Ker } A - \dim \text{Coker } A = 0$  (см. задания 1 и 2).

10. Оператор  $B = \frac{d^2}{dt^2}$  действует из пространства  $E = C^2[0,1]$  в пространство

$F = C[0,1]$ . Найдите фредгольмов индекс этого оператора.

Ответ : 2

Решение.  $\text{Ind } B = \dim \text{Ker } B - \dim \text{Coker } B = 2$  (см. задания 3 и 4).

11. Оператор  $B = \frac{d}{dt}$  действует из пространства  $E = C^1[0,1]$  в пространство

$F = C[0,1]$ ,  $Bx = \dot{x}$ . Найдите размерность ядра этого оператора равна.

Ответ : 1.

Решение. Пусть  $x \in \text{Ker } B$ . Тогда  $Bx = \dot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = a$ ,  $a \in \mathbb{R}^1$ .

Следовательно,  $\text{Ker } B$  одномерно.

12. Оператор  $B = \frac{d}{dt}$  действует из пространства  $E = C^1[0,1]$  в пространство

$F = C[0,1]$ ,  $Bx = \dot{x}$ . Найдите фредгольмов индекс этого оператора.

Ответ : 1.

Решение.  $\text{Ker } B$  одномерно (см. задание 11).  $\text{Im } B = F$ , то есть коядро оператора  $B$  нульмерно. Следовательно,  $\text{Ind } B = \dim \text{Ker } B - \dim \text{Coker } B = 1$ .

### Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов — указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).**

## ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЙ\*

### РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Направление/специальность \_\_\_\_ 02.04.01 математика и компьютерные науки

Дисциплина \_\_\_\_\_ Б1.О.14 Элементы теории фредгольмовых отображений

Профиль подготовки/специализация \_\_\_\_\_ рекомендуется для всех профилей данного направления

Форма обучения \_\_\_\_ очная

Учебный год \_\_\_\_ 2024–2025

Ответственный исполнитель

\_\_\_\_\_ *должность, подразделение*

\_\_\_\_\_ *подпись*

\_\_\_\_\_ *расшифровка подписи*

\_\_\_\_\_.\_\_\_\_ 20\_\_

СОГЛАСОВАНО

Куратор ООП

по направлению/специальности \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ *подпись*

\_\_\_\_\_ *расшифровка подписи*

\_\_\_\_\_.\_\_\_\_ 20\_\_

Начальник отдела обслуживания ЗНБ \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_.\_\_\_\_ 20\_\_

\* На образовательном портале «Электронный университет ВГУ» **НЕ РАЗМЕЩАЕТСЯ**

*подпись      расшифровка подписи*

---

Программа рекомендована НМС математического факультета, протокол № 0500–06 от 25.05.2023

## ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ†

### РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Направление/специальность \_\_\_\_ 02.04.01 математика и компьютерные науки

Дисциплина \_\_\_\_\_ Б1.О.14 Элементы теории фредгольмовых отображений

Профиль подготовки/специализация \_\_\_\_\_ рекомендуется для всех профилей данного направления

Форма обучения \_\_\_\_ очная

Учебный год \_\_\_\_ 2024–2025

В связи (на основании) \_\_\_\_\_  
изложить п. \_\_ РПД в следующей редакции:

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Ответственный исполнитель

\_\_\_\_\_. \_\_. 20\_\_

*должность, подразделение*

*подпись*

*расшифровка подписи*

СОГЛАСОВАНО

Куратор ООП

по направлению/специальности

\_\_\_\_\_. \_\_. 20\_\_  
*подпись*

*расшифровка подписи*

Начальник отдела обслуживания ЗНБ

\_\_\_\_\_. \_\_. 20\_\_  
*подпись*

*расшифровка подписи*

Изменения РПД рекомендованы НМС

\_\_\_\_\_  
*наименование факультета, структурного подразделения*

протокол № \_\_\_\_\_ от \_\_. \_\_. 20\_\_

† При наличии **РАЗМЕЩАЕТСЯ** на образовательном портале «Электронный университет ВГУ»

